Treillis et Zoologie des groupes

Partiel :

* Questions de cours
* 1 exo sur les treillis
* Autres exos

RAPPEL SUR LES ANNEAUX

Anneau

On prend un groupe abélien et on lui ajoute une loi (on vérifie l’associativité, l’élément neutre mais pas forcément l’inverse)

Un groupe abélien connu : . Donc un anneau connu est

Un élément est dit inversible dans un anneau  :

Dans , les inversibles sont -1 et 1.

Exemple fondamental :

Exercice :

*Soit G non commutatif*

On va mq si

* Ordre 1 :

Tout groupe d’ordre 1 est commutatif.

* Ordre 2 :

Il y a 2 éléments. L’élément neutre et un autre élément. Or l’élément neutre commute avec tout le monde. Donc tout le monde commute avec tout le monde. (l’inverse de l’élément neutre est lui-même et l’inverse du deuxième élément est lui-même)

Autre démo. Cardinal 2 : d’après Lagrange il y a deux sous-groupes de cardinal 1 et 2. 1 et 2 sont premiers. Donc le sous-groupe d’ordre 2 est cyclique. Le groupe d’ordre 2 est isomorphe à qui est commutatif.

* Ordre 3 :

3 est premier donc même démo qu’au-dessus.

* Ordre 4 :

Il est d’ordre 2². On a deux groupes :

Soit il est cyclique soit il l’est pas. Or le centre de tout p-groupe est non trivial. Il est de cardinal p ou p². S’il est d’ordre p² il est abélien, s’il est d’ordre p il l’est aussi (un peu plus difficile). (Cf exercice 20.2 Groupe quotient)

* Ordre 5 :

5 est premier donc même démo que pour 2 et 3

Exercice 1 :

1°)

Mq groupe.

* Elément neutre : On a bien
* Existence de l’inverse : Si alors
* Associativité. Soient (def de )

?

Non car n’est pas un groupe

Déterminer

Par récurrence (mq vrai pour ) puis faire la récurence.

2°) G monogène ssi

On suppose

Donc Contradiction

3°)

Mq

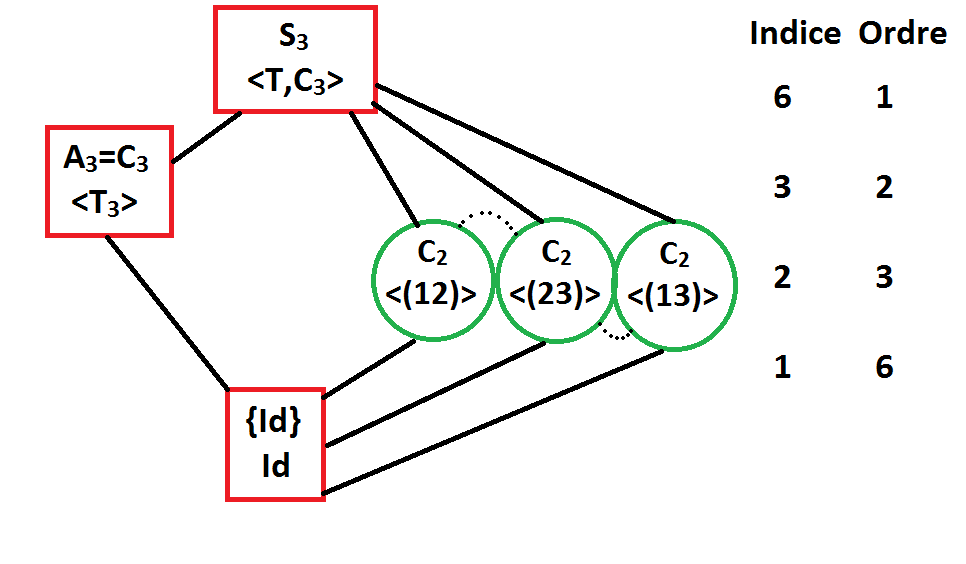
Autour du groupe symétrique :

1°)

2°)

* Sg d’indice 2 de  :
* Sg d’indice 3 de  :

3°)



Exercice 2 :

1°) Mq groupe et déterminer son cardinal.

* Elément neutre (ne change pas la transformation du plan)
* Elément inverse (correspond à fois pour les rotations et pour les symétries facile)
* Associativité (composition d’isométrie)

car on a rotations (dont la symétrie). Il y a une seule symétrie. Mais on compose symétrie et rotation. On a alors symétries. C’est-à-dire en tout transformations du plan.

2°)

ne sont pas indépendants donc n’est pas monogène. Le plus petit ensemble de générateurs possible est donc celui definit ci-dessus.

3°)

On doit **définir une image pour les générateurs**

Application à

1°)

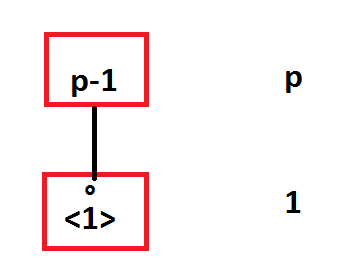
2°)

* Sous-groupe d’indice 2 :
* Sous-groupe d’indice 3 :

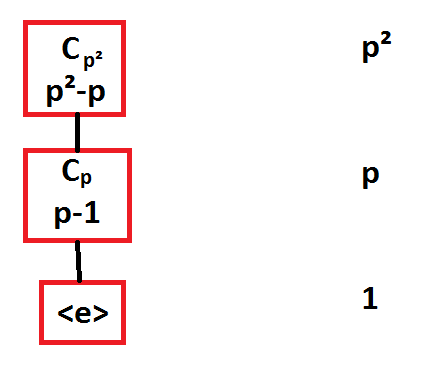
|  |
| --- |
| A REVOIR  TD groupe et ss groupe :  Exercice 9  Exercice 10  TD morphisme de groupe :  Exercice 7  Exercice 9  TD action de groupe :  Exercice 1 (a,b)  TD groupe quotient :  Exercice 2  Exercice 3  Exercice 4  Exercice 5  Exercice 13  Exercice 20 |

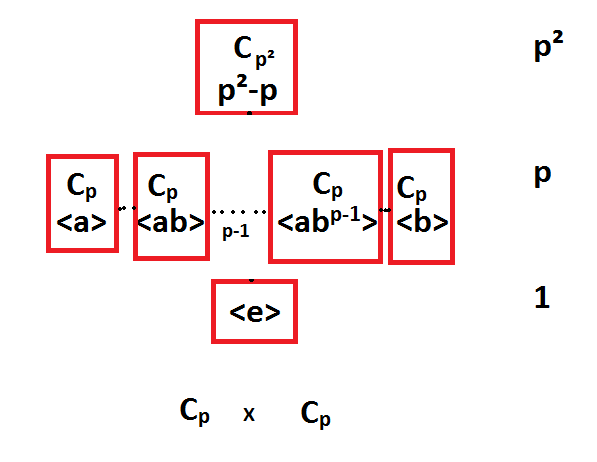
Exercice 3 :

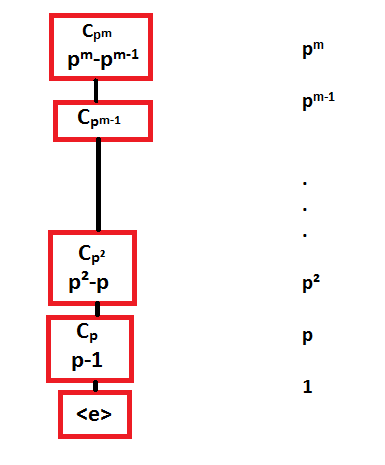
1°)



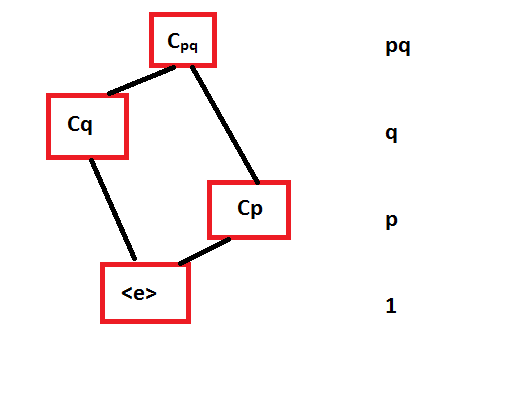
2°)







3°)



Exercice 4 :